□09□ □□□□□□

□□□□□□□□□□

□□□□□□□10□□□

1□□2021□•□□□□□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{(x-a)^2}{lnx}$ □□□ a □□□□□

□1□□ $a=1$ □□□□□□□□1□□□ x □□□ $f(x)\geq k$ □□□□□□ k □□□□□□

□2□□ $0<a<1$ □□□□□ $f(x)$ □3□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□ $x_1<x_2<x_3$ □□□□ $x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

□□□□□□□1□ $x>1$ □□ $f(x)\geq k$ □□ $(x-1)^2-klnx\geq 0$ □□□

□ $g(x)=(x-1)^2-klnx$ □□ $g'(x)=\frac{2x^2-2x-k}{x}$ □

$x>1$ □ $\therefore 2x^2-2x=2x(x-1)>0$

① $k\leq 0$ □ $g'(x)>0$ □ $\therefore g(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$\therefore x>1$ □□ $g(x)>g$ □1□ $=0$ □□□□□□

② $k>0$ □□□ $g'(x)=0$ □□□ $x_1=\frac{1-\sqrt{1+2k}}{2}<0$ □ $x_2=\frac{1+\sqrt{1+2k}}{2}>1$ □

$\therefore x\in(1,x_2)$ □ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □ $(1,x_2)$ □□□□□□

$\therefore x\in(1,x_2)$ □ $g(x)<g$ □1□ $=0$ □□□□□□□□□□

□□□□□ $k\leq 0$ □

□2□□□□ $f'(x)=\frac{(x-a)(2lnx+\frac{a}{x}-1)}{ln^2x}$ □

□□□□ $h(x)=2lnx+\frac{a}{x}-1$ □□ $h'(x)=\frac{2x-a}{x^2}$ □

$\therefore$□□ $h(x)$ □ $(0,\frac{a}{2})$ □□□□□□□ $(\frac{a}{2}$□$+\infty)$ □□□□□

□ □□ $f(x)$ □3□□□□ $x_1<x_2<x_3$ □

□□ $h_{min}(x)=h(\frac{a}{2})=2ln\frac{a}{2}+1<0$ □□□ $a<\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

□ $0<a<1$ □□ h□a□ $=2lna<0$ □ h□1□ $=a-1<0$ □

$\therefore$□□ $f(x)$ □□□□□□ $(x_1$□$a)$ □ $(x_3$□$+\infty)$ □□□□□□ $(0,x_1)$ □ $(a,1)$ □ $(1,x_3)$ □

□□□□□ $f(x)$ □3□□□□□□□ $x_2=a$ □

$\therefore$□ $0<a<1$ □□ x_1 □ x_3 □□□ $h(x)=2lnx+\frac{a}{x}-1$ □□□□□□

□□ $\begin{cases}2lnx_1+\frac{a}{x_1}-1=0\\2lnx_3+\frac{a}{x_3}-1=0\end{cases}$ □□□ a □ $2x_1lnx_1-x_1=2x_3lnx_3-x_3$

□ $g(x)=2xlnx-x$ □ $g'(x)=2lnx+1$ □□□ $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ □□ $x_1<\frac{1}{\sqrt{e}}<x3$

$\therefore$□□ $g(x)=2xlnx-x$ □ $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ □□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{e}}$□$+\infty)$ □□□

□□ $x_1+x_3>\sqrt{\frac{2}{e}}\Leftrightarrow x_3>\sqrt{\frac{2}{e}}-x_1\Leftrightarrow g(x_3)>g(\sqrt{\frac{2}{e}}-x_1)$

□ $g(x_1)=g(x_3)$ □$\therefore$□□ $g(x_1)>g(\sqrt{\frac{2}{e}}-x_1)$

□□□□ $F(x)=g(x)>g(\sqrt{\frac{2}{e}}-x)$ □□ $F(\frac{1}{\sqrt{e}})=0$

□□□□□$x\in(0$□$\frac{1}{\sqrt{e}}]$□□□□□□□

□$F'(x)=2\ln x+2\ln(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)+2$□$F'(x)>0$□

$\therefore F(x)$□$(0$□$\frac{1}{\sqrt{e}}]$□□□□□□ $\therefore F(x)<F(\frac{1}{\sqrt{e}})=0$

$\therefore$□$0<a<1$□□ $x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}$□

2□□2021•□□□□□□□□□□□□ $f(x)=a\ln x-x$□□□□ $f(x)$□$x=1$□□□□□□

□1□□□□ $y=f(x)$□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□

□2□□□□ $g(x)=\frac{(x-m)^2}{f(x)+x}(0<m<1)$□□□□ $g(x)$□3□□□ x_1□x_2□$x_3(x_1<x_2<x_3)$□□□□ $\ln(\frac{x_1+x_3}{2})>-\frac{1}{2}$□

□□□□□□□1□$f(x)=a\ln x-x$□$f'(x)=\frac{a}{x}-1$□

□□ $f(x)$□$x=1$□□□□□□$\therefore f'$□1□$=a-1=0$□□$a=1$□

□$f(x)=\ln x-x$□f□1□$=-1$□

$\therefore$□□$y=f(x)$□$(1$□f□1□$)$□□□□□□□$y=-1$□

□2□$g(x)=\frac{(x-m)^2}{f(x)+x}=\frac{(x-m)^2}{\ln x+x-x}=\frac{(x-m)^2}{\ln x}(0<m<1)$□

□□□□□□□$(0,+\infty)$□$x\neq1$□

$\therefore g'(x)=\frac{2(x-m)\ln x-(x-m)^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{(x-m)(2\ln x+\frac{m}{x}-1)}{\ln^2 x}$□

□$h(x)=2\ln x+\frac{m}{x}-1$□

$\therefore h(x)=\frac{2x-m}{x^2}$□$h(x)$□$(0,\frac{m}{2})$□□□□□□□$(\frac{m}{2}$□$+\infty)$□□□□□□

□ h□1□$=m-1<0$□h□2□$=2ln2+\frac{m}{2}-1=ln\frac{4}{e}+\frac{m}{2}>0$□

$\therefore h(x)$□$(1,2)$□□□□□□

□$h(x_0)=0$□$\therefore x_0>m$□

□$g'(x)>0$□□□$0<x<m$□□$x>x_0$□□□□□□□□

□$g'(x)<0$□□□$m<x<x_0$□□□□□□□□

$\therefore$□$x=m$□□□□□□□□□

$\therefore$□$0<m<1$□□$x=m$□$f(x)$□□□□□

$h(\frac{m}{2})$□$h(x)$□□□□□

□ $g(x)$□□□□□□$x_1<x_2<x_3$□

$\therefore h(\frac{m}{2})=2ln\frac{m}{2}+1<0$□□$m<\frac{2}{\sqrt{e}}$□

$\therefore m$□□□□□□$(0,\frac{2}{\sqrt{e}})$□

□$0<m<\frac{2}{\sqrt{e}}$□□$h(m)=2lnm<0$□h□1□$=m-1<0$□

$\therefore x_2=m$□

□x_1□x_3□□□$h(x)$□□□□□□

$\therefore \begin{cases} 2lnx_1+\frac{m}{x_1}-1=0 \\ 2lnx_2+\frac{m}{x_2}-1=0 \end{cases}$□□□$m$□$2x_1lnx_1-x_1=2x_3lnx_3-x_3$□

□ $\varphi(x)=2x\ln x-x$ □ $\varphi'(x)=2\ln x+1$ □ $\varphi'(x)$ □□□□ $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ □□ $x_1<\frac{1}{\sqrt{e}}<x_2$ □

$\therefore \varphi(x)$ □ $(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ □□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{e}}$ □ $+\infty)$ □□□□

□□□ $\ln(\frac{x_1+x_2}{2})>-\frac{1}{2}$ □□□ $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$ □□□□□□ $x_2>\frac{2}{\sqrt{e}}-x_1$ □□ $\varphi(x_2)>\varphi(\frac{2}{\sqrt{e}}-x_1)$ □

□ $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ □$\therefore$□□ $\varphi(x_1)>\varphi(\frac{2}{\sqrt{e}}-x_1)$ □

□□□□ $F(x)=\varphi(x)-\varphi(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □□ $F(\frac{1}{\sqrt{e}})=0$ □

$\therefore$□□□□□ $(0$ □ $\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □ $F(x)$ □□□□□

□□ $\varphi(x)$ □ $(0$ □ $\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□

□ x□□□□ $\frac{1}{\sqrt{e}}-x$ □□□ $\varphi(\frac{1}{\sqrt{e}}-x)$ □□□ $-\varphi(\frac{1}{\sqrt{e}}-x)$ □□□

$\therefore -\varphi(\frac{1}{\sqrt{e}}-x)$ □ $(0$ □ $\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□□

$\therefore \varphi(x)-\varphi(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □ $(0$ □ $\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□□

$\therefore$□ $0<a<\frac{2}{\sqrt{e}}$ □□ $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

□ $\ln(\frac{x_1+x_2}{2})>-\frac{1}{2}$ □

3□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{e^x-ax^2}{1+x}$ □

□1□□ $a=0$□□□ $f(x)$ □□□□□

□2□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1□x_2□x_3□

①□a□□□□□□

②□□□ $x_1+x_2+x_3>-2$□

□□□□□□1□□ $a=0$□□ $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$□ $x\neq-1$□

$\therefore f'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$□

□ $f'(x)<0$□□ x□ $(-\infty,-1)$□ $(-1,0)$□□ $f(x)$ □□□□□

□ $f'(x)>0$□□ x□ $(0,+\infty)$□□ $f(x)$ □□□□□

□2□① □ $f(x)=\frac{e^x-ax^2}{1+x}$□

$\therefore f'(x)=\frac{x[e^x-a(x+2)]}{(1+x)^2}$

□□ $f'(0)=0$□□ $g(x)=e^x-a(x+2)$□□ $g(x)=0$□□□□□□□□ 0 □□□□ -1 □□□

□□□□□ $g'(x)=e^x-a$□

□□□ $g'(x)=e^x-a=0$□□□□□ $x_0=lna$□□□ x_0□ $g(x)$ □□□□□□

□□ $g(x)=0$□□□□□□ $g(x_0)<0$□□□□□□□ $x\to+\infty$□ $x\to-\infty$□□ $g(x)=e^x-a(x+2)\to+\infty)$

□ $g(x_0)=e^{lna}-a(lna+2)=-a(lna+1)<0$□□ $a>\frac{1}{e}$□

□□ $g(0)\neq0$□□ $a\neq\frac{1}{2}$□

□□□□□ $a>\frac{1}{e}$□ $a\neq\frac{1}{2}$□□□ $g(-1)=\frac{1}{e}-a<0$□ $g(x)=0$□□□□□□□□□ -1 □□□□□□ -1□

□□□□□□□□□□ $x=0$ □ $f'(x)=0$ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $f'(x)$ □□□□□□□□□□ $f(x)$ □□□□□□□

□□□ a □□□□□ $(\frac{1}{e},\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ □

② □□□①□□ $f(x)$ □□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□□□□ $g(x)=0$ □□□□□□□□ x_1 □ x_2 □□□ $x_1<-1<x_2$ □□□□□ $x_3=0$ □

□□□ $x_1+x_2+x_3>-2$ □

□□□□ $x_1+x_2>-2$ □

□□□□□ $x_1>-x_2-2$ □

□□ $g(x)$ □ $(-\infty,\ln a)$ □□□□□□□□ $\ln a>-1$ □

□□□□ $g(x_1)<g(-2-x_2)$ □□□ $g(x_1)=g(x_2)=0$ □

□□□ $g(x_2)<g(-2-x_2)$ □

□ $e^{x_2}-a(x_2+2)<e^{2-x_2}-a[(-2-x_2+2]$

□□□ $e^{x_2}-e^{2-x_2}-2a(x_2+1)<0$ □

□ $g(x_2)=e^{x_2}-a(x_2+2)=0$ □□ $a=\frac{e_{x_2}}{x_2+2}$ □□□□□□□□□□□□□□□□ $e^{x_2}-e^{2-x_2}-\frac{2e^{x_2}}{x_2+2}(x_2+1)<0$ □

□□□ $x_2e^{x_2}+(x_2+2)e^{x_2-2}>0$ □

□ $h(x)=xe^{x}+(x+2)e^{x-2}$ □

□ $x>-1$ □□ $h'(x)=(x+1)e^{x}-(x+1)e^{x-2}=(x+1)(e^{x}-e^{x-2})>0$ □ $h(x)$ □□□□□□ $h(-1)=0$ □

□□□ $x>-1$ □□ $h(x)>0$ □

□□□ $x_2e^{x_2}+(x_2+2)e^{x_2-2}>0$ □

□□ $x_1 + x_2 + x_3 > -2$ □

4．□2021•□□□□□□□□□ $f(x) = (x-2)e^x + a(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})$ □

□1□□□ $f(x)$ □□□□□□□□

□2□□ $f(x)$ □3□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□□ $x_1 < x_2 < x_3)$ □□□□ $x_1x_3 < x_2^2$ □

□□□□□1□□□ $f'(x) = (x-1)e^x + a(x^2 - x) = (x-1)(e^x + ax)$ □

□ $g(x) = \frac{e^x}{x}$ □ $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ □□ $g(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□

□ $(-\infty,0)$ □□□□□□□ $x<0$ □□ $g(x) < 0$ □

□ $a > 0$ □□ $f(x)$ □2□□□□□ $-e$, a, 0 □□ $f(x)$ □□1□□□□

□ $a < -e$ □□ $f(x)$ □3□□□□

□2□□□□□ $f(x)$ □3□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□□ $x_1 < x_2 < x_3)$ □□□ $e^{x_1} = -ax_1$ □ $e^{x_3} = -ax_3$ □ $x_2 = 1$ □□□ $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_3}}{x_3}$ □

□□ $x_1x_3 < x_2^2$ □□ $x_1x_3 < 1$ □

□ $\frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^{x_3}}{x_3}$ □□ $\frac{x_3}{x_1} = \frac{e^{x_3}}{e^{x_1}} = e^{x_3 - x_1}$ □

□ $\frac{x_3}{x_1} = k$ □ $k > 1$ □ $e^{x_3 - x_1} = k$ □□□ $x_3 - x_1 = lnk$ □

□□ $\begin{cases} x_3 - x_1 = lnk, \\ \frac{x_3}{x_1} = k, \end{cases}$ □ $\begin{cases} x_1 = \frac{lnk}{k-1}, \\ x_3 = \frac{klnk}{k-1}, \end{cases}$ □□ $x_1x_3 = \frac{k(lnk)^2}{(k-1)^2}$ □

所以要证 $x_1x_3<1$，只需 $\frac{k(lnk)^2}{(k-1)^2}<1$，$k>1$，

则有 $(lnk)^2<\frac{(k-1)^2}{k}$，即 $lnk<\frac{k-1}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}$，则需证明 $lnk-\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}<0$.

令 $\sqrt{k}=t$，$t>1$，即需证明 $h(t)=lnt^2-t+\frac{1}{t}<0$.

因为 $h'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-t^2+2t-1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$ 恒成立，

所以 $h(t)$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上是单调递减函数，则有 $h(t)<h(1)=ln1-1+\frac{1}{1}=0$，

即 $h(t)=lnt^2-t+\frac{1}{t}<0$ 成立，所以 $x_1x_3<1$，即 $x_1x_3<x_2^2$ 得以证明.

5.（2021 春•兴义市校级月考）已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{lnx}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[e^{\frac{1}{4}}, e]$ 上的最值；

(II) 若 $g(x)=f(x)+\frac{4m^2-4mx}{lnx}$（其中 m 为常数），且当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，设函数 $g(x)$ 的 3 个极值点为 a，b，c，且 $a<b<c$，证明：

$0<2a<b<1<c$，并讨论函数 $g(x)$ 的单调区间（用 a，b，c 表示单调区间）

【解答】解：（I）$f'(x)=\frac{x(2lnx-1)}{ln^2x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{e}$，列表：

x	$[e^{\frac{1}{4}}, \sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e}, e]$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	极小值	增

所以函数 $f(x)$ 在 $[e^{\frac{1}{4}}, \sqrt{e}]$ 上单调递减，在 $[\sqrt{e}, e]$ 上单调递增.

□ $f(\sqrt{e})=4\sqrt{e}$□ f□e□$=e^2>4\sqrt{e}$□

$\therefore$□□ $f(x)$ □□□□□ e^2 □□□□□ $2e$□

□II□□□□□ $g(x)=\frac{x^2-4mx+4m^2}{lnx}$ □

$g'(x)=\frac{(x-2m)(2lnx+\frac{2m}{x}-1)}{ln^2x}$ □

□ $h(x)=2lnx+\frac{2m}{x}-1$ □ $h'(x)=\frac{2x-2m}{x^2}$ □

□□□□□□□ $h(x)$ □ $(0,m)$ □□□□□□□ $(m,+\infty)$ □□□□□□

□□□□ $g(x)$ □3□□□□□

□ $h(x)min=h(m)=2lnm+1<0$□

$h(2m)=2ln2m<0$□ h□1□$=2m-1<0$□

□□□□ $g(x)$ □□□□□□□□□□□□ $2m$□□□□□□ m□□□□□□1□

□□3□□□□□ a□b□c□□ $a<b<c$□

□□ $a<m<2m=b<1<c$□□□ $2a<2m=b$□

□ $0<2a<b<1<c$□

□□ $g(x)$ □ $(0,a)$ □□□□□□□ (a,b) □□□□□□

□ $(b,1)$ □□□□□□□ $(1,c)$ □□□□□□□ $(c,+\infty)$ □□□□□□

6□□2021•□□□□□□□ $f(x)=(x-a)^2(x+b)e^x(a,b\in R)$ □

□1□□ $a=0$□ $b=-3$□□□□□ $f(x)$ □□□□□□

□2□□ $x=a$□ $f(x)$ □□□□□□

(i)□$a=0$□□□b□□□□□□

(ii)□a□□□□□□x_1□x_2□x_3□□□$x_1<x_2<x_3$))□$f(x)$□3□□□□□□□□□□□□b□□□□□□x_4□□□x_4□x_1□x_2□x_3□□□

□□□□□□□□b□□□□□□x_4□□□□□□□□□□□□

□□□□□□1□$a=0$□$b=-3$□□

$f(x)=x^2(x-3)e^x$□

$f'(x)=e^x x(x^2-6)$□

□$f'(x)<0$□□□$x<-\sqrt{6}$□$0<x<\sqrt{6}$□

□$f'(x)>0$□□□$-\sqrt{6}<x<0$□$x>\sqrt{6}$□

$\therefore f(x)$□$(-\infty,-\sqrt{6})$□$(0,\sqrt{6})$□□□$(-\sqrt{6}$□$0)$□$(\sqrt{6}$□$+\infty)$□□□

□2□(i)□□$a=0$□□$f(x)=x^2(x+b)e^x$□$\therefore f'(x)=[x^2(x+b)]'e^x+x^2(x+b)(e^x)'=e^x x[x^2+(b+3)x+2b]$□

□$g(x)=x^2+(b+3)x+2b$□ △$=(b+3)^2-8b=(b-1)^2+8>0$□$\therefore$□$x_1<x_2$□$g(x)=0$□□□□□

①□$x_1=0$□$x_2=0$□□□$x=0$□□□□□□□□□□□

②□$x_1\neq 0$□$x_2\neq 0$□□□$x=0$□$f(x)$□□□□□□□$x_1<0<x_2$□$\therefore g(0)<0$□□$2b<0$□$\therefore b<0$□

(ii)□□$f'(x)=e^x(x-a)[x^2+(3-a+b)x+2b-ab-a]$□

□$g(x)=x^2+(3-a+b)x+2b-ab-a$□□△$=(3-a+b)^2-4(2b-ab-a)=(a+b-1)^2+8>0$□

于是，假设 x_1, x_2 是 $g(x)=0$ 的两个实根，且 $x_1<x_2$.

由 (I) 可知，必有 $x_1<a<x_2$，且 x_1、a、x_2 是 $f(x)$ 的三个极值点，

则 $x_1=\dfrac{(a-b-3)-\sqrt{(a+b-1)^2+8}}{2}$，$x_2=\dfrac{(a-b-3)+\sqrt{(a+b-1)^2+8}}{2}$，

假设存在 b 及 x_4 满足题意，

① 当 x_1，a，x_2 等差时，即 $x_2-a=a-x_1$ 时，

则 $x_4=2x_2-a$ 或 $x_4=2x_1-a$，

于是 $2a=x_1+x_2=a-b-3$，即 $b=-a-3$.

此时 $x_4=2x_2-a=a-b-3+\sqrt{(a+b-1)^2+8}-a=a+2\sqrt{6}$ 或

$x_4=2x_1-a=a-b-3-\sqrt{(a+b-1)^2+8}-a=a-2\sqrt{6}$，

② 当 $x_2-a\neq a-x_1$ 时，则 $x_2-a=2(a-x_1)$ 或 $(a-x_1)=2(x_2-a)$

若 $x_2-a=2(a-x_1)$，则 $x_4=\dfrac{a+x_2}{2}$，

于是 $3a=2x_1+x_2=\dfrac{3(a-b-3)-\sqrt{(a+b-1)^2+8}}{2}$，

即 $\sqrt{(a+b-1)^2+8}=-3(a+b+3)$.

$(a+b-1)^2+9(a+b-1)+17=0$，$a+b+3<0$，$a+b-1=\frac{-9-\sqrt{13}}{2}$

$b=-a-\frac{7+\sqrt{13}}{2}$

$x_4=\frac{a+x_1}{2}=\frac{2a+(a-b-3)-3(a+b+3)}{4}=-b-3=a+\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

② $(a-x_1)=2(x_2-a)$，$x_4=\frac{a+x_1}{2}$

$3a=2x_2+x_1=\frac{3(a-b-3)+\sqrt{(a+b-1)^2+8}}{2}$

$\sqrt{(a+b-1)^2+8}=3(a+b+3)$

$(a+b-1)^2+9(a+b-1)+17=0$，$a+b+3>0$，$a+b-1=\frac{-9+\sqrt{13}}{2}$

$b=-a-\frac{7-\sqrt{13}}{2}$，$x_4=\frac{a+x_1}{2}=\frac{2a+(a-b-3)-3(a+b+3)}{4}=-b-3=a+\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

b

$b=-a-3$，$x_4=a\pm2\sqrt{6}$

$b=-a-\frac{7+\sqrt{13}}{2}$，$x_4=a+\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$b=-a-\frac{7-\sqrt{13}}{2}$，$x_4=a+\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

7□□2021□•□□□□□□□□□□□ $f(x)=x^2+ax+b$□ $g(x)=lnx$□

□1□□ $F(x)=f(x)-g(x)$ □□ $F(x)$ □ $[1$ □ $2]$ □□□□□

□2□□ $G(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ □□ $a=-4m$□ $b=4m^2(m\in R)$ □□ $0<m<\dfrac{1}{2}$ □□□□□ $G(x)$ □3□□□□□ x_1 □ x_2 □ $x_3(x_1<x_2<x_3)$ □

□i□□□□ $0<2x_1<x_2<1<x_3$ □

□ii□□□□□ $G(x)$ □□□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□□□□□□

□□□□□□1□ $F(x)=x^2+ax+b-lnx(x>0)$ □

$F'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+ax-1}{x}$ □

□ $F'(x)=0$ □□ $x_1=\dfrac{-a-\sqrt{a^2+8}}{4}<0$ □ $x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+8}}{4}>0$ □

$F'(x)=\dfrac{2(x-x_1)(x-x_2)}{x}$ □

□□□□□

x	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2$□$+\infty)$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	□□	□□□	□□

□□ $F(x)_{max}=max\{F$□1□□ F□2□$\}$

□ F□1□$-F$□2□$=(a+b+1)-(2a+b+4-ln2)=-a+ln2-3$□

□□□ $a\leqslant ln2-3$ □□ $F(x)_{max}=F$□1□$=a+b+1$□

□ $a>\ln 2-3$ □□ $F(x)_{max}=F$ □2□ $=2a+b+4-\ln 2$ □

□2□□i□ $G(x)=\dfrac{x^2-4mx+4m^2}{\ln x}$ □ $G'(x)=\dfrac{(x-2m)(2\ln x+\frac{2m}{x}-1)}{\ln^2 x}$ □

□ $h(x)=2\ln x+\dfrac{2m}{x}-1$ □ $h'(x)=\dfrac{2x-2m}{x^2}$ □

□ $h(x)$ □ $(0,m)$ □□□□□ $(m,+\infty)$ □□□□□

□□ $h(x)_{min}=h(m)=2\ln m+1$ □

□□□□ $G(x)$ □3□□□□□□□ $2\ln m+1<0$ □□ $0<m<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ □

□□□ $0<m<\dfrac{1}{2}$ □□ $h(m)=2\ln m+1<1+2\ln\dfrac{1}{2}=1-\ln 4<0$ □ h□1□ $=2m-1<0$ □

□□□□ $G(x)$ □3□□□□□□□□□ $2m$ □□□□□□ m □□□□□□1□

□ $x_1<x_2<x_3$ □□□ $0<x_1<m$ □ $x_2=2m$ □ $x_3>1$ □

□ $0<x_1<\dfrac{x_2}{2}$ □ $x_2=2m<1<x_3$ □□ $0<2x_1<x_2<1<x_3$ □

□ii□□ $x\in(0,x_1)$ □□ $h(x)=2\ln x+\dfrac{2m}{x}-1>0$ □ $x-2m<0$ □

□ $G'(x)<0$ □□□□ $G(x)$ □□□□

□ $x\in(x_1$ □ $x_2)$ □□ $h(x)=2\ln x+\dfrac{2m}{x}-1<0$ □ $x-2m<0$ □

□ $G'(x)>0$ □□□□ $G(x)$ □□□□

□ $x\in(x_2$ □ $1)$ □□ $h(x)=2\ln x+\dfrac{2m}{x}-1<0$ □ $x-2m>0$ □

□ $G'(x)<0$ □□□□ $G(x)$ □□□□

□ $x\in(1,x_3)$ □□ $h(x)=2\ln x+\dfrac{2m}{x}-1<0$ □ $x-2m>0$ □

□ $G(x)<0$ □□□□ $G(x)$ □□□□

□ $x\in(x_3$ □ $+\infty)$ □□ $h(x)=2lnx+\frac{2m}{x}-1>0$ □ $x-2m>0$ □

□ $G(x)>0$ □□□□ $G(x)$ □□□□

□□□□□ $G(x)$ □□□□□□□□ $(x_1$ □ $x_2)(x_3$ □ $+\infty)$ □

□□□□□□□ $(0$ □ $x_1)(x_2$ □ $1)(1$ □ $x_3)$ □

8□□2021•□□□□□□□□□ $f(x)=\frac{(x-a)^2}{lnx}$ □□□ a □□□□□

□1□□ $a=0$ □□□□□ $f(x)$ □□□□□□□□□□□

□2□□ $a>0$ □□□□□ $f(x)$ □3□□□□□ x_1 □ x_2 □ x_3 □□ $x_1<x_2<x_3$ □

① □ a □□□□□□

② □□□ $0<a<1$ □□ $x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

□□□□□□□1□ $a=0$ □□ $f(x)=\frac{x^2}{lnx}$ □ $f'(x)=\frac{x(2lnx-1)}{(lnx)^2}$ □

$\therefore x\in(0,1)$ □□ $f'(x)<0$ □ $x\in(1,\sqrt{e})$ □□ $f'(x)<0$ □ $x\in(\sqrt{e},+\infty)$ □□ $f'(x)>0$ □

$\therefore$ □□ $f(x)$ □□□□□□□□ $(0,1)$ □ $(1$ □ $\sqrt{e}]$ □□□□□ $x=\sqrt{e}$ □

□2□① $f'(x)=\frac{(x-a)(2lnx+\frac{a}{x}-1)}{ln^2x}$ □

□ $h(x)=2lnx+\frac{a}{x}-1$ □ $h'(x)=\frac{2x-a}{x^2}$ □

$\therefore h(x)$ □ $(0,\frac{a}{2})$ □□□□□□□ $(\frac{a}{2},+\infty)$ □□□□□□

$\therefore h(\frac{a}{2})$ □ $h(x)$ □□□□□

□ $f(x)$ □□□□□□ $x_1 < x_2 < x_3$ □

$\therefore h(\frac{a}{2}) = 2ln\frac{a}{2} + 1 < 0$ □

$\therefore a < \frac{2}{\sqrt{e}}$ □

$\therefore a$ □□□□□□ $(0, \frac{2}{\sqrt{e}})$ □

② □□□□ $0 < a < 1$ □□ h□a□$=2lna < 0$□ h□1□$= a - 1 < 0$□

$\therefore x_2 = a$ □

□ x_1 □ x_3 □□□ $h(x)$ □□□□□□

$$\therefore \begin{cases} 2lnx_1 + \frac{a}{x_1} - 1 = 0 \\ 2lnx_3 + \frac{a}{x_3} - 1 = 0 \end{cases}$$ □

□□ a □ $2x_1lnx_1 - x_1 = 2x_3lnx_3 - x_3$ □

□ $g(x) = 2xlnx - x$ □ $g'(x) = 2lnx + 1$ □ $g'(x)$ □□□□ $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ □□ $x_1 < \frac{1}{\sqrt{e}} < x_3$ □

$\therefore g(x)$ □ $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$ □□□□□ $(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ □□□□

□□□ $x_1 + x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x_3 > \frac{2}{\sqrt{e}} - x_1 \Leftrightarrow g(x_3) > g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1)$ □

□ $g(x_1) = g(x_3)$ □$\therefore$□□ $g(x_1) - g(\frac{2}{\sqrt{e}} - x_1) > 0$ □

□□□□ $F(x)=g(x)-g(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □□ $F(\frac{1}{\sqrt{e}})=0$ □

∴□□□□ $x\in(0,\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □ $F(x)$ □□□□□

$g(x)$ □ $(0,\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□

∴ x □□□□ $\frac{2}{\sqrt{e}}-x$ □□□ $g(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □□□ $-g(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □□□

∴ $-g(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □ $(0$ □ $\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□□

∴ $g(x)-g(\frac{2}{\sqrt{e}}-x)$ □ $(0$ □ $\frac{1}{\sqrt{e}}]$ □□□□□□

∴□ $0<a<1$ □□ $x_1+x_3>\frac{2}{\sqrt{e}}$ □

9□□□ $f(x)=(ax+1)lnx-\frac{x^2}{2}-ax+a+\frac{1}{2}(a\in R)$ □

□1□□ $a=2$ □□□□□ $f(x)\leqslant 0$ □

□2□□□ $f(x)$ □□□3□□□□ x_1 □ x_2 □ $x_3(x_1<x_2<x_3)$ □

□i□□□□ a □□□□□□

□ii□□□□ $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}>a^2-4a+7$ □

□□□□□□ $f(x)$ □□□□□ $(0,+\infty)$ □□□□ $f'(x)=alnx-x+\frac{1}{x}$ □

□ $g(x)=f'(x)$ □□ $g'(x)=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$ □

□□□ f □1□ $= f'$ □1□ $=0$□

□1□□□□□ $a=2$ □□ $g(x)=-\frac{x^2-2x+1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}\leq 0$ □□□□□ $x=1$ □□□□□□□

□□ $f'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□□ $(0,1)$ □ $f'(x)>f'$ □1□ $=0$□

□ $(1,+\infty)$ □□ $f'(x)<f'$ □1□ $=0$□

□□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)\leq f$ □1□ $=0$□

□2□□i□①□ $a\leq 0$ □□ $f'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□1□□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$f(x)$ □□□□ 1 □□□□□□□□□□

② □ $0<a<2$ □□□□□□□ $y=x^2-ax+1$ □□□□△ $=a^2-4<0$□

□□ $g(x)<0$ □□□□ $f'(x)$ □ $(0,+\infty)$ □□□□□□

□□1□□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□ $f(x)$ □□□□ 1 □□□□□□□□□□

③ □ $a=2$ □□□1□□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□ $(1,+\infty)$ □□□□□□

$f(x)$ □□□□ 1 □□□□□□□□□□

④ □ $a>2$ □□ $g(x)=0$ □□ $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ □

□ $x_A=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ □ $x_B=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ □

□□□□□□ $y=x^2-ax+1$ □□□□□

□ $(0,x_A)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $(x_A$ □ $x_B)$ □□ $g'(x)>0$ □ $g(x)$ □□□□□

□ $(x_B$ □ $+\infty)$ □□ $g'(x)<0$ □ $g(x)$ □□□□□

□□ $f'(x_A)<f'$ □1□ $=0$ □ $f'(x_B)>f'$ □1□ $=0$ □

□ $x\in(0,1)$ □□□□ $lnx, x-1<x$ □□□ $lnx=-2ln\sqrt{\frac{1}{x}}>-2\sqrt{\frac{1}{x}}$ □

□ $x_0<\frac{9}{64a^2}<\frac{1}{2}$ □□ $x_0<\frac{1}{4x_0}$ □ $\frac{2a}{\sqrt{x_0}}<\frac{3}{4x_0}$ □

□ $f(x_0)>-\frac{2a}{\sqrt{x_0}}-x_0+\frac{1}{x_0}=(\frac{1}{4x_0}-x_0)+(\frac{3}{4x_0}-\frac{2a}{\sqrt{x_0}})>0$ □

□□□□□□□□□□ $\exists$ □□ $x_1\in(0,x_A)$ □ $f(x_1)=0$ □

□□ $f(x)$ □ $(0,1)$ □□□□□□□□□□□ x_1 □

□ $x\in(1,+\infty)$ □□□□ $f(\frac{1}{x_1})=aln\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1}+x_1=-(alnx_1-x_1+\frac{1}{x_1})=0$ □

□ $f(x)$ □ $(x_B$ □ $+\infty)$ □□□□□□

□□ $f(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□□□□□□ $\frac{1}{x_1}$ □

□□ x_1 □ $x_2=1$ □ $x_3=\frac{1}{x_1}$ □ $f(x)$ □□□□□

□□□□□□□ a □□□□□□ $(2,+\infty)$ □

□ii□□□□□□i□□ $f(x)$ □□3□□□□□□□□ $a>2$ □

□□□ $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}=x_3^2+\frac{2}{x_3}$ □

□ $h(x)=x^2+\frac{2}{x}$ □□□□□□ $h(x_3)>a^2-4a+7$ □

□□□ $h'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$ □

□□ $h(x)$ □ $(1,+\infty)$ □□□□□□

□□□□ $x_3>x_B=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}>a-1>1$ □

□□ $h(x_3)>(a-1)^2+\frac{2}{a-1}$ □

□□□□□□ $(a-1)^2+\frac{2}{a-1}>a^2-4a+7$ □

□□□□□□□□□ $(a-2)^2>0$ □□□□

□□□□□□□□□

10□□□□□ $f(x)=ax\ln x+k$ □ (e,e) □□□□□□□ $2x-y-e=0$ □

(I) □□□ $f(x)$ □□□□□

□II□□ $0<m<\frac{1}{2}$ □□□□□ $G(x)=\frac{x(x-2m)^2}{f(x)}$ □3□□□□□□□ x_1 □ x_2 □ $x_3(x_1<x_2<x_3)$ □□□□ $0<2x_1<x_2<1<x_3$ □

□□□□□□□I□□ $2x-y-e=0$ □□□ $k_0=2$ □

$f'(x)=ax\times\frac{1}{x}+a\ln x=a+a\ln x$ □

□□ $k_0=f'$ □e□ $=a+a\ln e=2a$ □

□□$2a=2$□□□$a=1$□

□□□(e,e)□□□□□

□□$e=e\ln e+k$□□□$k=0$□

□□□□$f(x)$□□□□□□$f(x)=x\ln x$□

□II□ $G(x)=\frac{x(x-2m)^2}{f(x)}=\frac{x(x-2m)^2}{x\ln x}=\frac{(x-2m)^2}{\ln x}$□

$$G(x)=\frac{2(x-2m)\ln x-\frac{1}{x}(x-2m)^2}{(\ln x)^2}=\frac{(x-2m)(2\ln x-\frac{1}{x}(x-2m))}{(\ln x)^2}$$□

□ $h(x)=2\ln x-\frac{1}{x}(x-2m)=2\ln x+\frac{2m}{x}-1$□

$h(x)=\frac{2x-2m}{x^2}$□

□□$h(x)$□$(0,m)$□□□□□□□$(m,+\infty)$□□□□□□

□□$h(x)_{min}=h(m)=2\ln m+1$□

□□□□$G(x)$□3□□□□□

□□$2\ln m+1<0$□

□□$0<m<\frac{1}{\sqrt{e}}$□

□□□$0<m<\frac{1}{2}$□□

$h(m)=2\ln m+1<1+2\ln\frac{1}{2}=1-\ln 4<0$□

h□1□$=2m-1<0$□

□□□□$G(x)$□3□□□□□□□□□□$2m$□□□□□□m□□□□□1□

□$x_1<x_2<x_3$□□□$0<x_1<m$□$x_2=m$□$x_3>1$□

□$0 < x_1 < \frac{x_2}{2}$□$x_2 = 2m < 1 < x_3$□

□$0 < 2x_1 < x_2 < 1 < x_3$□